Schéma numérique pour la résolution de l'équation du transport des neutrons avec la méthode des caractéristiques

François FÉVOTTE
Simone SANTANDREA
Richard SANCHEZ

CEA/DEN/DM2S/SERMA

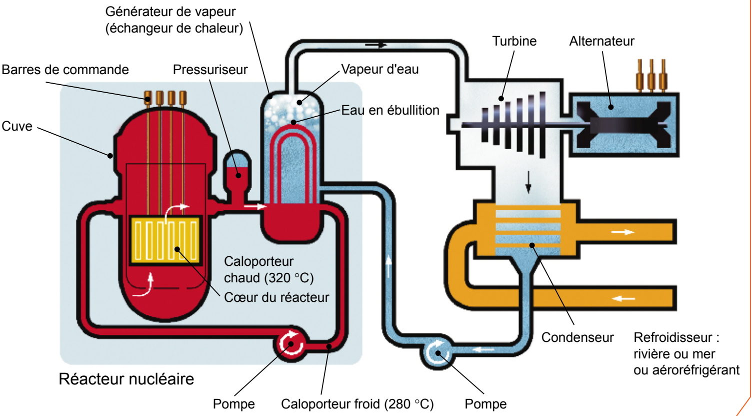
Rencontres Jeunes Chercheurs 2006

Plan

Plan

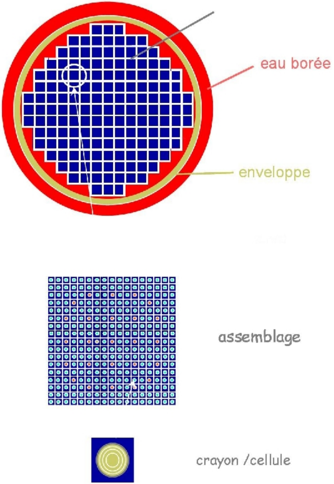
Introduction

Schéma de principe d'un réacteur à eau sous pression



Introduction

Problème multi-échelles



Introduction

Utilité des calculs de simulation neutronique

- Conception :
  - Conception des assemblages combustibles
  - Dimensionnement du coeur
  - Dossiers de sûreté
- Exploitation :
  - Plans de chargement
  - Confrontation avec les détecteurs
- Démantèlement :
  - Radioprotection
  - Transport des déchets

Plan

Modélisation de la neutronique

Grandeurs fondamentales de la neutronique

- 7 variables :
  - $\vec{r}$: position du neutron
  - $\vec{\Omega}$: direction du neutron
  - E ou v : énergie ou vitesse du neutron ($E = \frac{1}{2}\, m\, v^2$)
  - t : temps

Modélisation de la neutronique

Grandeurs fondamentales de la neutronique

- 7 variables :
  - $\vec{r}$: position du neutron
  - $\vec{\Omega}$: direction du neutron
  - E ou v : énergie ou vitesse du neutron ($E = \frac{1}{2} m v^2$)
  - t : temps
- densité de neutrons : $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-3}]$
  nombre de neutrons par unité de volume

Modélisation de la neutronique

Grandeurs fondamentales de la neutronique

- flux de neutrons : $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-2}\, s^{-1}]$
  nombre de neutrons traversant une surface élémentaire orthogonale par unité de temps

Modélisation de la neutronique

Grandeurs fondamentales de la neutronique

- flux de neutrons : $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-2}\, s^{-1}]$
  nombre de neutrons traversant une surface élémentaire orthogonale par unité de temps

- courant neutronique : $\vec{J}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-2}\, s^{-1}]$
  $\vec{J} \cdot \vec{N}$: nombre de neutrons traversant une surface orthogonale à $\vec{N}$

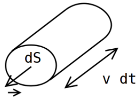
Modélisation de la neutronique

Grandeurs fondamentales de la neutronique

- flux de neutrons : $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-2}\, s^{-1}]$
  nombre de neutrons traversant une surface élémentaire orthogonale par unité de temps

- courant neutronique : $\vec{J}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad [cm^{-2}\, s^{-1}]$
  $\vec{J} \cdot \vec{N}$: nombre de neutrons traversant une surface orthogonale à $\vec{N}$

- $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = v\, n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$
  $\vec{J}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \vec{\Omega}\, \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$



Modélisation de la neutronique

Transport libre (sans collision)

- Opérateur de transport :

$$\frac{1}{v}\,\frac{d\Phi}{dt} = \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi$$

Modélisation de la neutronique

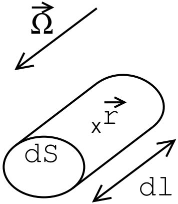
Transport libre (sans collision)

- Opérateur de transport :

$$\frac{1}{v}\,\frac{d\Phi}{dt} = \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi$$

- Bilan du nombre de neutrons dans un cylindre :

$$\overbrace{dS\ dl\ dn(\vec{r})}^{\textit{neutrons dans le cylindre}}$$



Modélisation de la neutronique

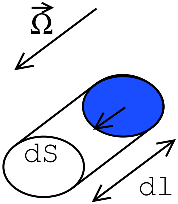
Transport libre (sans collision)

- Opérateur de transport :

$$\frac{1}{v}\,\frac{d\Phi}{dt} = \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi$$

- Bilan du nombre de neutrons dans un cylindre :

$$\overbrace{dS\ dl\ dn(\vec{r})}^{neutrons\ dans\ le\ cylindre} = \underbrace{dS\ dt\ \Phi(\vec{r}-\frac{dl}{2}\vec{\Omega})}_{neutrons\ qui\ rentrent}$$

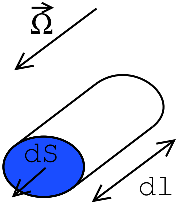


Modélisation de la neutronique

Transport libre (sans collision)

- Opérateur de transport :

$$\frac{1}{v}\,\frac{d\Phi}{dt} = \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi$$



- Bilan du nombre de neutrons dans un cylindre :

$$\overbrace{dS\ dl\ dn(\vec{r})}^{\textit{neutrons dans le cylindre}} = \underbrace{dS\ dt\ \Phi(\vec{r}-\frac{dl}{2}\vec{\Omega})}_{\textit{neutrons qui rentrent}} - \underbrace{dS\ dt\ \Phi(\vec{r}+\frac{dl}{2}\vec{\Omega})}_{\textit{neutrons qui sortent}}$$

Modélisation de la neutronique

Interactions avec la matière : grandeurs fondamentales

- Section efficace (macroscopique) : $\Sigma \quad [cm^{-1}]$
  sur un petit parcours dx, la probabilité de collision est $\Sigma\, dx$
  $1/\Sigma$ est la longueur moyenne de parcours entre deux collisions

Modélisation de la neutronique

Interactions avec la matière : grandeurs fondamentales

- Section efficace (macroscopique) : $\Sigma \quad [cm^{-1}]$
  sur un petit parcours dx, la probabilité de collision est $\Sigma\, dx$
  $1/\Sigma$ est la longueur moyenne de parcours entre deux collisions
- Taux de réaction : $\tau = \Sigma\, \Phi \quad [cm^{-3}\, s^{-1}]$
  nombre d'interactions par unité de temps et de volume :
  - τ_f : fission (le neutron provoque la fission du noyau rencontré)
  - τ_s : diffusion (le neutron repart dans une autre direction avec une vitesse moindre)
  - τ_c : capture radiative (le neutron est absorbé par le noyau)
  - ...

Modélisation de la neutronique

Interactions avec la matière : opérateur de collision et sources

$$\frac{1}{v}\,\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{-\Sigma_t\,\Phi}_{} + \underbrace{Q}_{}$$

disparition :

- *scattering*
- *capture*
- *fission*

sources :

- *scattering*
- *fission*

Equation de Boltzmann

Forme stationnaire intégro-différentielle simplifiée

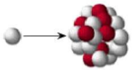
- Equation stationnaire :

Equation de Boltzmann

Forme stationnaire intégro-différentielle simplifiée

- Equation stationnaire :

$$\underbrace{\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi}_{transport}$$



Equation de Boltzmann

Forme stationnaire intégro-différentielle simplifiée

- Equation stationnaire :

$$\underbrace{\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi}_{\textit{transport}} + \underbrace{\Sigma\,\Phi}_{\textit{interactions}}$$

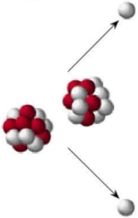
Equation de Boltzmann

Forme stationnaire intégro-différentielle simplifiée

- Equation stationnaire :

$$\underbrace{\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi}_{\textit{transport}} + \underbrace{\Sigma \, \Phi}_{\textit{interactions}} = \underbrace{S}_{\textit{sources}}$$

  - *internes*
  - *externes*



Equation de Boltzmann

Forme stationnaire intégro-différentielle simplifiée

- Equation stationnaire :

$$\underbrace{\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi}_{transport} + \underbrace{\Sigma\,\Phi}_{interactions} = \underbrace{S}_{sources}$$

  - *internes*
  - *externes*

- Conditions aux limites :
  - réflexion
  - translation
  - flux nul
  - ...

Plan

Étude de l'équation de Boltzmann

Motivations pour MOC

- Equation sur le flux Φ et le courant $\vec{J}$:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = \operatorname{div} \vec{J}$$

Étude de l'équation de Boltzmann

Motivations pour MOC

- Equation sur le flux Φ et le courant $\vec{J}$:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = \operatorname{div} \vec{J}$$

- L'opérateur de transport n'est pas “compatible” avec les termes sources provenant de l'opérateur de collision.

Étude de l'équation de Boltzmann

Motivations pour MOC

- Equation sur le flux Φ et le courant $\vec{J}$:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = \mathrm{div}\, \vec{J}$$

- L'opérateur de transport n'est pas “compatible” avec les termes sources provenant de l'opérateur de collision.

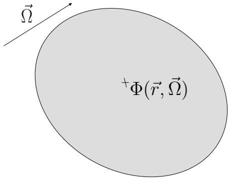
- Il est intéressant de :
  - simplifier l'opérateur de transport (loi de Fick $\rightarrow$ diffusion)
  - mettre en place un schéma numérique permettant de bien intégrer le transport ($\rightarrow$ méthode des caractéristiques)

Méthode des caractéristiques

Inversion de l'opérateur de transport

- Equation stationnaire de transport libre des neutrons :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = 0$$



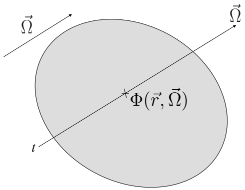
Méthode des caractéristiques

Inversion de l'opérateur de transport

- Equation stationnaire de transport libre des neutrons :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = 0$$

- Le long d'une droite de direction $\vec{\Omega}$, le flux Φ est constant



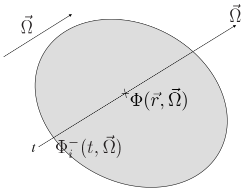
Méthode des caractéristiques

Inversion de l'opérateur de transport

- Equation stationnaire de transport libre des neutrons :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi = 0$$

- Le long d'une droite de direction $\vec{\Omega}$, le flux Φ est constant
$\Rightarrow$ la connaissance du flux aux bords du domaine suffit pour retrouver le flux en chaque point.



Méthode des caractéristiques

Prise en compte des absorptions

- Transport libre et absorption :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = 0$$

Méthode des caractéristiques

Prise en compte des absorptions

- Transport libre et absorption :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = 0$$

- Durant un parcours de longueur l dans un matériau de section efficace Σ, la probabilité de non-absorption d'un neutron est : $e^{-\Sigma\, l}$

Méthode des caractéristiques

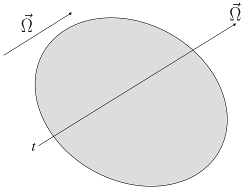
Prise en compte des absorptions

- Transport libre et absorption :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = 0$$

- Durant un parcours de longueur l dans un matériau de section efficace Σ, la probabilité de non-absorption d'un neutron est : $e^{-\Sigma\, l}$

- Traversée de la région i le long d'une caractéristique (t, Ω):



Méthode des caractéristiques

Prise en compte des absorptions

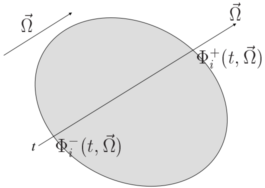
- Transport libre et absorption :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = 0$$

- Durant un parcours de longueur l dans un matériau de section efficace Σ, la probabilité de non-absorption d'un neutron est : $e^{-\Sigma\, l}$

- Traversée de la région i le long d'une caractéristique (t, Ω):

$$\Phi_i^+(t, \vec{\Omega}) = \Phi_i^-(t, \vec{\Omega})\ e^{-\Sigma_i\, l_i(t, \vec{\Omega})}$$



Méthode des caractéristiques

Prise en compte des sources

- Equation complète :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = S$$

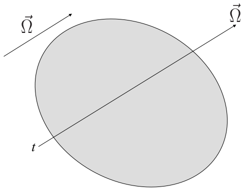
Méthode des caractéristiques

Prise en compte des sources

- Equation complète :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = S$$

- Les sources apparaissent tout au long du parcours et sont soumises à l'absorption jusqu'à la sortie de la région.



Méthode des caractéristiques

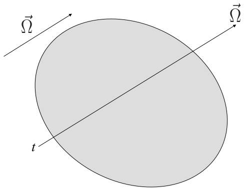
Prise en compte des sources

- Equation complète :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = S$$

- Les sources apparaissent tout au long du parcours et sont soumises à l'absorption jusqu'à la sortie de la région. Le flux issu des sources sortant de la région est :

$$\int_0^l s\, e^{-\Sigma(l-x)} \quad dx = \frac{1 - e^{-\Sigma\, l}}{\Sigma}\, s$$



Méthode des caractéristiques

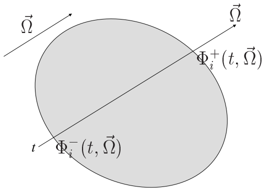
Résolution de l'équation de Boltzmann complète

- Equation de Boltzmann complète :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi + \Sigma \Phi = S$$

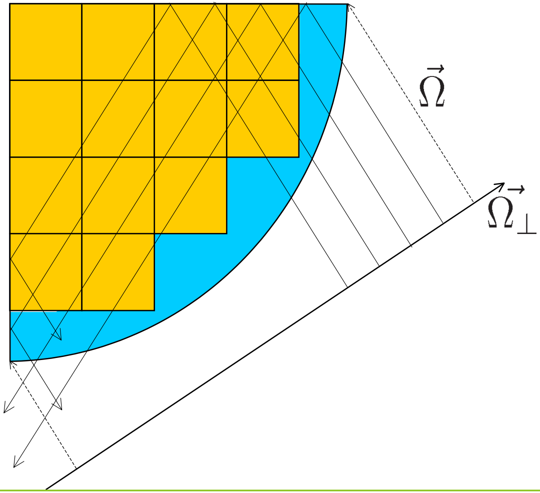
- Mise à jour du flux lors de la traversée d'une région i le long d'une caractéristique $(t, \vec{\Omega})$:

$$\Phi_i^+(t,\vec{\Omega}) \quad = \quad \Phi_i^-(t,\vec{\Omega})\, e^{-\Sigma_i\, l_i(t,\vec{\Omega})} + \frac{1 - e^{-\Sigma_i\, l_i(t,\vec{\Omega})}}{\Sigma_i}\, s_i(\vec{\Omega})$$



Méthode des caractéristiques

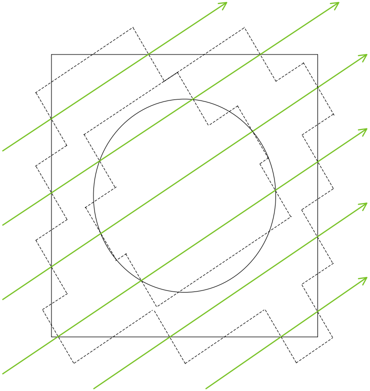
Mise en place en pratique



Plan

Méthode des « bandes »

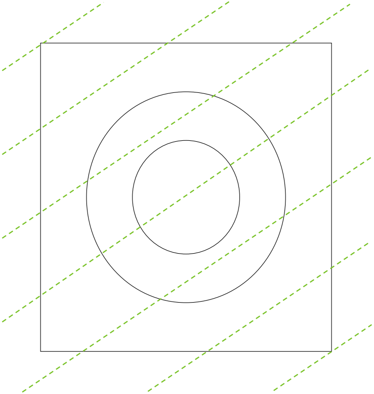
Problématique



- Mauvaise approximation de la géométrie :
  - Longueurs d'intersection non représentatives
  - Volumes approchés
- Discontinuités matérielles non prises en compte

Méthode des « bandes »

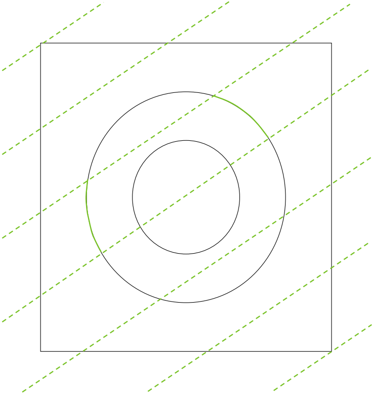
Mise en place



1. Découpage du domaine en « bandes »

Méthode des « bandes »

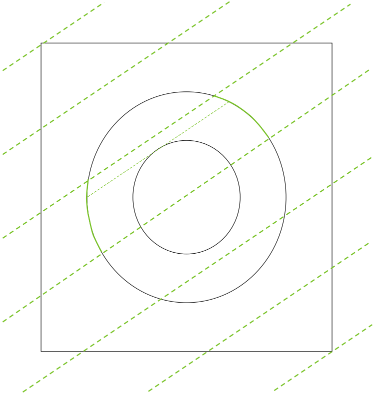
Mise en place



2. Découpage des bandes en « sections »

Méthode des « bandes »

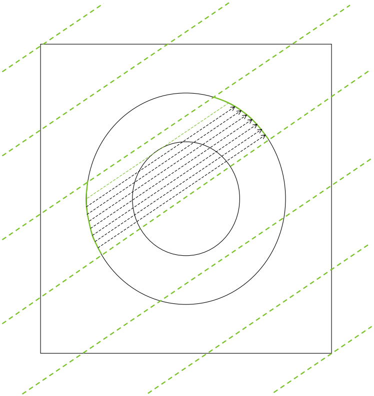
Mise en place



3. Projection des discontinuités dans les sections

Méthode des « bandes »

Mise en place



4. Intégration semi-exacte dans les zones inter-discontinuités

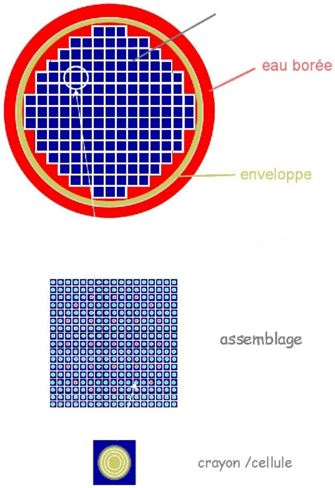
Méthode des « bandes »

Résultats

- Meilleure convergence en pas de traçage :
  - Convergence monotone
  - Meilleure précision à pas de traçage égal

Traçage modulaire

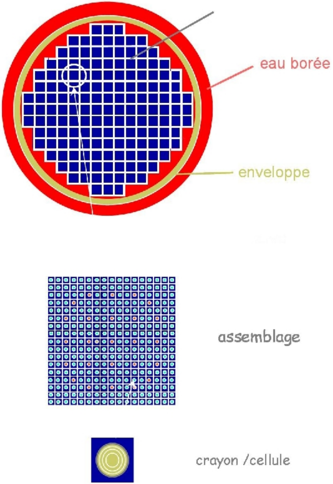
Problématique



- Problème fortement multi-échelle
- Présence de réseaux réguliers à tous les niveaux
- Présence de symétries

Traçage modulaire

Problématique

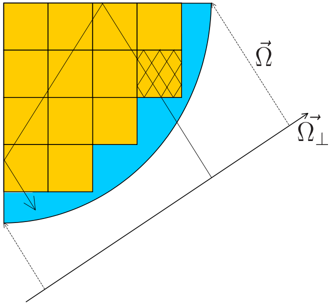


- Problème fortement multi-échelle
- Présence de réseaux réguliers à tous les niveaux
- Présence de symétries

Est-il possible de construire un traçage sur une cellule uniquement ?

Traçage modulaire

Problématique

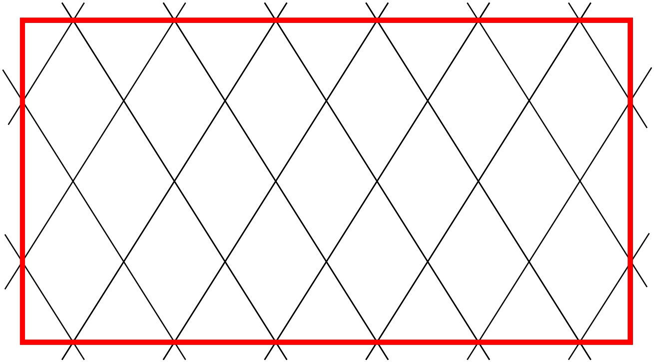


Conditions à vérifier pour le traçage :

- nombre fini de segments
- compatibilité avec les translations
- compatibilité avec les réflexions
- si possible, pas constant

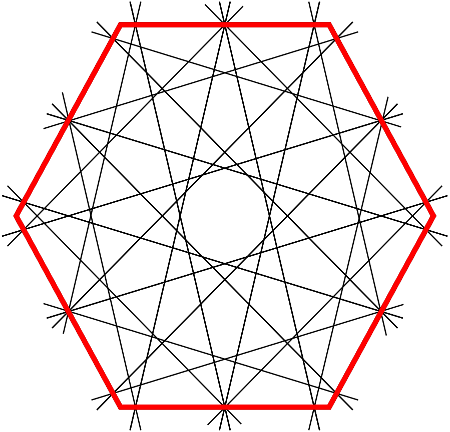
Traçage modulaire

Exemples de traçages invariants



Traçage modulaire

Exemples de traçages invariants



Conclusions

- La méthode des caractéristiques permet de résoudre efficacement le problème du transport des neutrons.

- La méthode des caractéristiques peut être améliorée en prenant en compte les spécificités des problèmes traités :
  - Discontinuités matérielles
    $\longrightarrow$ Intégration transverse semi-exacte
  - Périodicité de la géométrie
    $\longrightarrow$ Traçage modulaire

Conclusions

- Améliorations possibles
  - méthode des « bandes » :
    - augmentation du pas de traçage
    - représentation linéaire du flux
  - traçage modulaire :
    - implémentation en pratique
    - combinaison avec les bandes
  - parallélisation
  - vers le calcul 3D ?

Principe de la fission nucléaire

Réaction en chaîne